L'infinito fra filosofia e scienze esatte

n. 5
gennaio
2023

The Infinite between Philosophy and Sciences

anno XL

Vincenzo Fano, Claudio Ternullo

Corresponding author: claudio.ternullo@ub.edu; vincenzo.fano@uniurb.it

Nella sua *Storia dell'Eternità*, J. L. Borges rivendica, non senza un certo gusto del paradosso, la necessità di un tempo infinito collegandola ai temi della memoria e dell'identità:

> Si sa che l'identità personale risiede nella memoria, e che la scomparsa di quella facoltà comporta l'idiozia. Si può pensare lo stesso dell'universo. Senza una eternità, senza uno specchio delicato e segreto di ciò che è passato per le anime, la storia universale è tempo perduto, e con essa la nostra storia personale – il che scomodamente fa di noi altrettanti fantasmi[1].

Dunque, esistono infiniti dei quali non si può e non si deve fare a meno, secondo Borges, senza i quali gli esseri umani verrebbero declassati a spettri della storia.

Storicamente, l'infinito ha provocato un misto di rifiuto, esaltazione e confusione, uno stato d'animo ben compendiato dalla famosa frase di Hilbert:

> Da sempre l'infinito ha eccitato profondamente l'animo umano più di ogni altro problema. [...] Tuttavia, nessun *concetto*, più dell'infinito, ha bisogno di *chiarificazione*[2].

e, fra le possibili reazioni, il rifiuto è stato senza dubbio prevalente. Vale per la matematica antica e, in parte, anche per quella moderna. L'analisi della fine del XVII secolo, col suo riferimento a quantità più piccole di qualunque altra quantità data (gli *infinitesimi*), sembrò definitivamente consolidare questo rifiuto. In seguito, però, l'affermazione della teoria degli insiemi, lo sviluppo rigoroso della matematica non-archimedea (con la creazione, in particolare, dell'analisi non-standard), l'utilizzo dei metodi della logica matematica hanno reso l'infinito un oggetto non più misterioso e intrattabile.

Nell'ambito della fisica, invece, non sembra ancora del tutto svanito l'*horror infiniti*, a ragione, verrebbe da dire: l'idea di un universo spazialmente e temporalmente infinito, di una materia infinitamente divisibile, di quantità fisiche che ammettano valori infiniti (che siano, quindi, non sempre misurabili) è profondamente in contrasto con la nostra esperienza (finita e misurabile) della realtà. Eppure, anche le teorie fisiche fondamentali, cioè la relatività generale e la meccanica quantistica, non escludono, *a priori*, l'esistenza di infiniti fisici.

Nell'insegnamento scolastico i temi concernenti l'infinito sono esaminati in maniera sparsa, e, in molti casi, marginalizzati, sebbene discipline come Filosofia e Matematica invitino, per la loro stessa natura, a una riflessione più profonda su di essi. In questo dossier di *Nuova Secondaria*, proponiamo un itinerario specialistico, ma accessibile, attraverso alcuni di tali temi, entro una cornice unitaria ba-

[1] J.L. Borges, *Opere*, vol. I, Mondadori, Milano 2005, p. 540.
[2] D. Hilbert, *On the Infinite* [1925], in J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931*, Harvard University Press, Cambridge (MA) 1967. Trad. ital. in D. Hilbert, *Ricerche sui fondamenti della matematica*, Bibliopolis, Napoli 1978, p. 235.

sata sul primato del discorso matematico e scientifico.

Si comincia con un prologo di Vincenzo Fano divertente, ma ricco di spunti storici e filosofici, sull'infinito attuale. Nella *Fisica*, Aristotele aveva "bandito" l'infinito *attuale*, ovverosia l'infinito inteso come entità autonoma e compiuta, e il punto di vista aristotelico dominerà, con qualche eccezione, fino all'Ottocento. Nel suo racconto, Fano immagina, invece, che il matematico urbinate Federico Commandino trovi un chiaro riferimento all'infinito attuale (prudentemente sottoposto a censura) in Archimede, in particolare in quel manoscritto, perso, ma poi ritrovato, in cui il matematico siracusano tratta di questioni metodologiche, una "scoperta" che serve a ridimensionare il pregiudizio storico sulla paura dell'infinito attribuita ai matematici antichi. Il secondo contributo, di Paolo Bussotti, esamina alcuni aspetti poco noti della matematica dell'Ottocento, ovverosia, da una parte, la nozione di *elemento all'infinito* della geometria proiettiva, dall'altra, le teorie dell'*infinitesimo attuale* di Stolz, du Bois-Reymond e Veronese. In entrambi i casi, Bussotti mostra come la postulazione dell'esistenza di entità infinitarie (i punti all'infinito e gli infinitesimi) sia stata fondamentale per sviluppare teorie matematiche molto più vicine alle nostre intuizioni.

Nel caso della geometria proiettiva, la rivoluzione di Poncelet consente di riappropriarsi del carattere *sintetico* della geometria (messo in ombra dalla nascita della geometria *analitica*), nel caso delle teorie dell'infinitesimo attuale di riprendere l'uso diretto di quantità infinitesime nel calcolo che l'analisi "standard" riteneva di aver definitivamente bandito.

Col lavoro successivo, di Claudio Ternullo, si torna prepotentemente a quell'infinito attuale che ha portato alla nascita della teoria degli insiemi. Il lavoro di Ternullo rende conto sia del contributo di Georg Cantor, che è stato il principale creatore della teoria, sia degli assiomi della teoria di Zermelo-Fraenkel che sono visti come il fondamento della matematica. La ricerca di nuovi assiomi, e le possibilità di esplorazione dell'infinito attuale, tuttavia, non si esauriscono in quella teoria. Come messo in evidenza da Ternullo, i nuovi assiomi, in particolare quelli dei *grandi cardinali*, estendono e rafforzano il ruolo fondamentale della teoria degli insiemi nell'indagine di questioni concernenti *verità* e *indipendenza* in matematica.

Il lavoro di Vieri Benci ci riporta alla matematica non-archimedea (quella che ammette l'esistenza di infinitesimi) già, in parte, discussa, dal punto di vista storico, da Paolo Bussotti. Benci, assieme ad altri due matematici italiani (Marco Forti e Mauro Di Nasso), è stato il protagonista della rivoluzione recente rappresentata dalla *teoria delle numerosità*, una teoria dell'infinito che ha restituito centralità all'Assioma di Euclide ("la parte è sempre *minore* del tutto") rigettato dalla teoria degli insiemi. I teorici delle numerosità hanno dimostrato come sia possibile, attraverso questa nozione, produrre misure più "fini" della cardinalità di certi insiemi. Recentemente, poi, Benci ha formulato una versione più semplice e intuitiva dell'analisi non-standard, ovverosia la *teoria* α (α è la *numerosità* di $\mathbb{N}$, e la base di tutti i numeri infiniti e infinitesimi): i metodi e le applicazioni di questa teoria, in particolare nell'analisi, vengono discussi in questo contributo.

L'ultimo lavoro, di Enrico Cinti e Marco Sanchioni, esplora il tema dell'infinito fisico. Gli autori analizzano la questione dell'infinita divisibilità della materia (e dello spazio), un tema che aveva, già nella filosofia antica, opposto filosofi del calibro di Aristotele (che era continuista) e Democrito (che era atomista). Dopo aver mostrato come il *modello standard* delle particelle non sia in grado di dare una risposta alla questione, essi si rivolgono a due teorie che fondono meccanica quantistica e relatività generale nella *gravità quantistica*, la teoria delle *stringhe* e quella della *gravità quantistica a loop*: entrambe implicano l'esistenza di una lunghezza minima dello spazio, il che fa presupporre che la tesi atomistica possa essere definitivamente confermata, se sarà confermata una di queste due teorie. Uno dei pregi dell'articolo è, peraltro, quello di spiegare molto bene in che senso una questione, all'apparenza, puramente matematica si possa risolvere nell'ambito della fisica contemporanea.

Il nostro augurio conclusivo è che i temi trattati, alla cui analisi gli autori hanno dedicato una parte, talvolta, considerevole della propria attività di ricerca, diventino, attraverso l'uso di metodologie diversificate e approcci moderni, sempre più centrali nel *curriculum* scolastico, e possano, inoltre, rappresentare un'occasione di costruzione di esperienze didattiche innovative per i docenti di discipline come la Matematica e la Filosofia.

Vincenzo Fano
Università di Urbino

Claudio Ternullo
Università di Barcellona

Prologo (in forma di racconto) sull'infinito attuale

n. 5
gennaio
2023

anno XL

Prologue (in the form of a short story) on the actual infinite

Vincenzo Fano

Secondo Aristotele, l'infinito si dà solo in potenza, ovverosia si riferisce a un processo, a qualcosa di costantemente incompiuto. Questo punto di vista ha condizionato fortemente il pensiero successivo sull'infinito: bisognerà attendere la nascita della teoria degli insiemi perché esso venga definitivamente abbandonato. In questo breve racconto giallo, inventato ma verosimile, secoli prima della rivoluzione cantoriana tracce dell'infinito attuale vengono scovate dal matematico urbinate Federico Commandino nel manoscritto C smarrito (poi ritrovato di recente) di Archimede.

Aristotle held that the infinite only existed and could be thought of potentially, namely, as referring to a process, to something incomplete. Aristotle's views had a significant impact on the subsequent speculations on the infinite, as they would not be definitively overturned until the birth of set theory. But in this short fictitious, although not implausible, crime story, a few centuries before the Cantorian revolution, traces of the actual infinite are found by the mathematician, native of Urbino Federico Commandino in Archimedes' lost (and recently rediscovered) manuscript C.

Parole chiave
Infinito attuale e potenziale; Archimede; Commandino; manoscritto C

Keywords
Actual and potential infinite; Archimedes; Commandino: manuscript C

Corresponding author: vincenzo.fano@uniurb.it

1. Preambolo

Scrissi questo breve racconto qualche anno dopo la pubblicazione in italiano del bel libro di Netz e Noel[1] sul ritrovamento del manoscritto C di Archimede, poi tradotto e commentato[2]. Il testo era già stato visto dal grande filologo e storico della matematica antica Heiberg, ma poi era scomparso, per riapparire a un'asta nel 1998. Nel resoconto di Netz si racconta della sua eccitazione e di quella del collega Ken Saito nello scoprire che Archimede in una dimostrazione usa in modo informale l'infinito attuale. Da qui mi venne l'idea di immaginare che questo manoscritto avesse subito un certo ostracismo proprio a causa della scomoda idea dell'infinito attuale che conteneva.
In effetti, il filologo e matematico urbinate Federico Commandino, che ha restituito nel XVI secolo alla cultura europea buona parte della matematica antica, aveva intuito dell'esistenza di tale manoscritto. Questo perché Commandino aveva compreso che ci doveva essere un'altra opera di Archimede, che egli non possedeva, visto che non esisteva la trattazione di alcuni concetti geometrici che il siracusano utilizzava ne *I galleggianti*. E di fatto, Commandino ricostruì la teoria del baricentro che gli mancava[3].
Parecchi episodi qui raccontati sono inventati, ma i personaggi sono reali e quasi tutti i riferimenti storici sono corretti. In bibliografia ho citato un paio di volumi che spiegano bene il contributo di Commandino alla ricezione di Archimede nel Rinascimento[4]. Il racconto, fra l'altro, è stato rielaborato in un dramma da Gabriele Marchesini che lo ha messo in scena nel 2013 a Cesena, proprio nella Biblioteca Malatestiana. Il testo è stato poi pubblicato[5], ma l'idea originaria era un po' diversa. Non posso negare che il romanzo di Umberto Eco, *Il nome della rosa*, Bompiani, Milano 1982, uscito esattamente cinquanta anni fa, mi abbia ispirato. In effetti, l'infinito attuale gioca qui un ruolo simile a quello svolto nel giallo medioevale dal presunto secondo libro della *Poetica* di Aristotele, che avrebbe dovuto trattare la commedia. Una differenza è, però, che ciò che cercava Commandino c'era veramente. Non solo, dal punto di vista teologico e metafisico, l'infinito attuale ha una portata ben più dirompente, come si rese conto Cantor, quando nella seconda metà del XIX secolo spiegò al mondo come trattarlo con rigore.

2. Il racconto

Era una mite giornata di primavera del marzo del 1565 quella in cui Federico Commandino, al seguito del suo giovane protettore Ranuccio Farnese, si mosse per trasferirsi a Bologna da Urbino. Quest'ultimo, infatti, era stato nominato cardinale di quella città.
Federico soffriva talvolta di depressione e non era più giovane; aveva infatti 59 anni. Da parecchio tempo era tormentato da un problema difficile di matematica e di studi umanistici legato al sommo Archimede.
Federico nel 1558 aveva pubblicato da Paolo Manuzio a Venezia la traduzione dal greco di *Archimedis opera nonnulla*. In quell'edizione però non c'era *Sui galleggianti*, il capolavoro del più grande dei matematici. Commandino a Venezia aveva potuto vedere i codici raccolti dal principe degli umanisti, il cardinale Bessarione. Aveva inoltre tra le mani la traduzione latina de *I galleggianti* realizzata da Guglielmo di Moerbeke nel 1269. Era una copia che gli aveva regalato l'amico e protettore Marcello Cervini – papa Marcello II per qualche settimana, prima che un'improvvisa malattia lo portasse via.
In particolare, Federico non capiva come Archimede avesse potuto dimostrare la proposizione otto del secondo libro. La dimostrazione non c'era, come spesso capitava in Archimede. Ma non solo, essa presupponeva il calcolo del baricentro di un segmento di paraboloide, cioè un solido. Commandino conosceva bene il trattato del Siracusano *I piani bilanciati*, che spiegava come appendere un qualsiasi poligono a un filo in un solo punto in modo che restasse in equilibrio parallelo al suolo. Ma nella sua raccolta del 1558 non aveva tradotto *I piani*, perché doveva essere una trattazione incompleta. E il baricentro dei solidi? Archimede sapeva senz'altro calcolare il baricentro dei solidi, ma in nessuna delle sue opere tramandate ne parlava. Lo sapeva, proprio perché, per dimostrare la proposizione otto del secondo libro de *I galleggianti*, occorre trovare il baricentro di un solido.

[1] R. Netz-W. Noel, *Il codice perduto di Archimede*, BUR, Milano 2008.
[2] Archimede, *Metodo. Nel laboratorio di un genio*, a cura di F. Acerbi, C. Montanari e M.L. Guardini, Bollati Boringhieri, Torino 2013.
[3] F. Commandino, *Liber de centro gravitatis solidorum*, introduzione e traduzione di E. Gamba e V. Montebelli, Edizioni della Normale di Pisa, Pisa 2015.
[4] P.L. Rose, *The Italian renaissance of mathematics*, Libraire Droz, Genéve 1975; E. Gamba-V. Montebelli, *Le scienze a Urbino nel tardo Rinascimento*, Quattroventi, Urbino 1988.
[5] G. Marchesini, *Sulle tracce di Archimede*, Carocci, Roma 2015.

Federico, quando non era melanconico, provava a cercare questa dimostrazione. Ci riuscirà, tanto che a Bologna alla fine del 1565 non solo pubblicherà una splendida edizione de *I galleggianti*, molto migliore di quella precedente di Tartaglia, ma anche il suo personale capolavoro fisico-matematico, cioè il *Liber de centro gravitatis solidorum*. Non tradurrà mai, invece, *I piani bilanciati*, che invece verranno resi in latino dal suo grande allievo Guidobaldo dal Monte nel 1588. Si vede che gli mancava qualcosa.
Il lungo viaggio prevedeva una tappa a Cesena, per visitare la splendida *Libraria domini*, voluta da Novello Malatesta a imitazione di quella di Michelozzo a Firenze. La sua costruzione risaliva alla metà del Quattrocento. Cento anni prima di Federico. Era quell'epoca che aveva preparato gli strumenti del suo lavoro. Quegli umanisti avevano raccolto i manoscritti conservati a Costantinopoli. Uomini straordinari, letterati e matematici, come Giorgio Valla, Bessarione e il grande Federico da Montefeltro – la biblioteca di Urbino, che splendore – avevano cominciato quella semina che oggi cominciava a dare i suoi frutti.
Federico sapeva che Bessarione era stato a Bologna e nelle Romagne proprio in quegli anni, magari aveva lasciato lì il manoscritto di Archimede perduto, magari era uno di quelli che Novello aveva comprato a Costantinopoli per arricchire la sua neonata creatura e adesso lo aspettava a Cesena. Federico dimenticava la sua melanconia al pensiero di ritrovare quelle pagine del sommo matematico.
Stabilitosi a Cesena, Federico si recò a visitare la splendida aula progettata da Nuti, allievo di Leon Battista Alberti. Alle porte del convento trovò ad accoglierlo Frate Paolino, il custode della libraria, che era già stato informato del suo arrivo. Luminosa e bellissima la sala lo attendeva con i suoi seggi e i plutei colmi di codici legati ai leggii da una catenella per impedirne l'asportazione. Un clima di pace e di studio avvolse Federico, che si sentì per un momento sollevato dai suoi pensieri.
Da Frate Paolino venne a sapere che Bessarione in quegli anni Cinquanta del Quattrocento, quando era fra Bologna e le Romagne, aveva fatto preparare diciotto corali da mandare a Costantinopoli, per promuovere quell'unità fra le due Chiese che tanto auspicava. Ma nel maggio 1453 Costantinopoli cadde nelle mani dei turchi. La notizia arrivò a Bologna a luglio e Bessarione inviò i diciotto corali al nascente Convento dell'Osservanza a Cesena. Come mai, si chiese Federico, i corali non erano nella *libraria domini*?
Commandino, ben sapendo l'amore di Bessarione per Archimede, si recò all'Osservanza. Non fu facile ritrovare i diciotto corali, che nessuno più utilizzava. Avuto dai frati l'accesso alla stanza dove erano stati abbandonati, ne trovò solo diciassette. Uno era andato perso o rubato. I documenti, a ogni modo, non sembravano interessanti per il matematico.
Il giorno successivo tornò alla libraria a parlarne con Frate Paolino, che si lamentò dei frati dell'Osservanza e della loro incuria. Quest'ultimo imprecò anche contro il primo custode della libraria, Frate Francesco Bartolomeo da Figline, che non aveva preteso quei corali destinati a Costantinopoli. Forse, pensò Federico, Paolino era invidioso della grande arte amanuense di Frate Francesco, lui, che passava le giornate a riordinare i codici e i documenti a stampa, ma che non sapeva produrli, come il suo illustre predecessore.
Commandino riprese i suoi studi nella bella sala di lettura sotto l'elefante dei Malatesta.
Federico pensò a papa Niccolò V, Tommaso Parentucelli, amico caro di Bessarione, amante della matematica e degli studi umanistici, che commissionò a Giacomo da Verona la traduzione di Archimede in latino. Commandino la conosceva, ma aveva la sensazione che la sua del '58 fosse parecchio migliore. Niccolò V morì improvvisamente nel '55 e Bessarione fu richiamato a Roma, dove rischiò addirittura di essere eletto papa. Ma qualcosa si inceppò e il conclave gli preferì Callisto III.
Che cosa c'entra tutto questo con i diciotto, anzi diciassette, corali?
Commandino si concesse una breve passeggiata fra i banchi della bella sala illuminata dalle finestre ad arco. Gli cadde lo sguardo su una delle catenelle che legava i libri ai plutei. Notò che il punto di attacco era parecchio rovinato, come se fosse stato forzato o addirittura staccato e riattaccato. Federico allora si chiese che cosa fosse legato a quel laccio. Seguì con le dita la catena fino ad arrivare a un voluminoso codice. Sembrava il diciottesimo corale di Bessarione, almeno così diceva il frontespizio. Commandino però si accorse subito che non era un codice, ma un palinsesto. Era grande la metà. Qualcuno aveva scucito il vecchio in folio, cancellato il testo, tagliato le facciate, ricucito e scritto di nuovo. Non era il corale, ma una serie di preghiere. Spesso capitava a Costantinopoli che i codici preparati durante la rinascita di Leone il Geometra del IX e X secolo, quando ormai nessuno più li capiva, nel XIII secolo, venissero utilizzati come pergamena per libri di preghiere. Federico non disse nulla a

Frate Paolino. Era ormai sera, c'era poca luce. Si riprometteva il giorno dopo di provare a capire quale fosse stato il testo originale di quel palinsesto.
La mattina di buon'ora Federico si recò nuovamente alla libraria. Pioveva forte, come accade talvolta in primavera. Ripreso in mano lo strano palinsesto, il suo occhio esperto si rese presto conto che il testo cancellato era di matematica. Il cuore, ormai stanco, cominciò a battergli vorticosamente nel petto. Girò i fogli, ma era difficile capirci qualcosa, sia perché il testo era stato cancellato, sia perché i fogli erano stati rimessi assieme in ordine casuale rispetto all'opera originaria.
Però si intravedevano anche i diagrammi. Ecco, Federico si illuminò. Il disegno del segmento di paraboloide, quello che serviva ne *I galleggianti*. Ma non si leggeva nulla. Però questa era la prova che Archimede aveva scritto anche sul centro di gravità dei solidi. Commandino, nei giorni successivi, continuò a compulsare il libro di preghiere, tanto che Frate Paolino restò edificato dal fervore religioso del famoso matematico, di solito dedito agli studi profani.
Ranuccio spingeva per partire. Occorreva proseguire per Bologna. Federico non riusciva a staccarsi dal suo tesoro. Qua e là raccoglieva faticosamente qualche frammento di proposizione e qualche brano di dimostrazione. Una mattina Fra Paolino si avvicinò a Federico un po' sospettoso, allora Commandino, per essere ancor più credibile nella finzione, lesse mormorando le vecchie preghiere bizantine. Non aveva problemi con il greco né con quella scrittura abbastanza recente, ma, sorpresa nella sorpresa, mancava un folio! Era chiaro che il palinsesto era stato nuovamente scucito, un folio era stato sottratto e poi il tutto nuovamente ricucito.
Federico cercava di riordinare le idee. Diciassette dei diciotto corali ordinati da Bessarione erano all'Osservanza, abbandonati quasi ai topi. Il diciottesimo era qui nell'antica libraria, ma in realtà non era un corale, bensì un palinsesto; un libro di preghiere che originariamente conteneva un trattato di Archimede. Questo codice era stato sottratto alla libraria – come si vedeva dall'aggancio forzato della catenella. Questa sottrazione non era stata indolore, poiché mancava un folio del palinsesto.
Federico il mattino seguente si recò nuovamente all'Osservanza. I frati lo accolsero ancor più scorbutici e sospettosi della volta precedente. Lo studioso voleva visitare di nuovo la stanza con i corali di Bessarione. Commandino restò nella penombra di quel bugigattolo, fino a quando a lume di candela si accorse di una teca in legno massiccio, chiusa ermeticamente a chiave. Avvicinò la luce e lesse un'iscrizione sbiadita: "*Dixit insipiens in corde suo: non est Deus!*". Era il fulminante inizio del tredicesimo Salmo di Davide. Federico lo conosceva bene. Il matematico urbinate continuava a scartabellare fra i diciassette corali, senza trovare il folio mancante. Restava la possibilità che fosse nella teca, ma perché nasconderlo? Uscendo incontrò Fra Gherardino, uno dei più anziani e più loquaci fra i frati dell'Osservanza. Gherardino spiegò a Federico che si diceva che quella stanza contenesse qualcosa di diabolico che risaliva a Bessarione. Il cardinale stesso volle che i corali stessero lì e in particolare una pagina la fece nascondere nella teca, perché quella era stata la causa della sua non-elezione al soglio pontificio nel conclave del 1455. Gherardino sconsigliava Federico di proseguire le sue ricerche profane e invece lo esortava a tornare a leggere le antiche preghiere.
Il giorno dopo Federico tornò con il fabbro e, aperta la teca, trovò il folio mancante. Nel pomeriggio egli era già nella libraria per studiare la preziosa reliquia. Diversi giorni di lotta, sotto l'occhio vigile e non convinto di Fra Paolino, lo portarono alla conclusione che quella era la proposizione quattordici del trattato di Archimede: diciassette corali e quello era il diciottesimo; il tredicesimo Salmo e quella era la quattordicesima proposizione. Si parlava di un prisma, di un rettangolo e delle loro sezioni. E poi ...*isos plethei*... e ancora ...*megethe*... La stessa quantità di grandezze... Federico cominciò a tremare. "Quantità di grandezze?" Ma quante sono le sezioni di un prisma? Infinite! E infinito non è una quantità, né tantomeno una quantità misurabile; addirittura "la stessa quantità". Archimede, dunque, stava lavorando con l'infinito in atto!
A Federico cominciò a girare la testa e fu costretto ad allontanarsi dal leggio. Passeggiò lento nella libraria guardando le splendide finestre illuminate. Si immaginò infiniti triangoli uno accanto all'altro, che andavano a costituire un prisma. Pensò che l'infinito non era solo il non-finito, cioè qualcosa che andrebbe al di là del finito, ma era esso stesso qualcosa, qui dentro ai nostri corpi e l'incipit del tredicesimo Salmo gli risuonò nelle orecchie: "*Dixit insipiens in corde suo: non est Deus*". La luce del sole lambiva appena le sue spalle.

Vincenzo Fano
Università di Urbino

n. 5
gennaio
2023

anno XL

L'infinito nella matematica dell'Ottocento

Infinity in the 19th Century Mathematics

Paolo Bussotti

Nel XIX secolo l'infinito attuale entrò nel dominio della matematica grazie all'opera di Georg Cantor. Prima di lui, nello stesso secolo, Bernard Bolzano aveva tematizzato la possibilità di introdurre numeri attualmente infiniti. Le teorie di questi due autori sono note e ben studiate. Esistono, invece, tre matematici che concepirono l'esistenza di grandezze infinite in atto e le cui idee sono meno conosciute. Si tratta di Paul Dubois-Reymond, Otto Stolz e Giuseppe Veronese. In questo articolo presenterò le loro concezioni, facendole, però, precedere da alcune osservazioni sugli elementi all'infinito della geometria proiettiva che esistevano in matematica da prima del XIX secolo, ma la cui teoria completa fu offerta proprio nell'Ottocento.

In the 19th century, actual infinity entered the domain of mathematics thanks to the work of Georg Cantor. Before him, in the same century, Bernard Bolzano had thematised the possibility of introducing actual infinite numbers. The theories of these two authors are well known and well studied. There are, on the other hand, three mathematicians who conceived the existence of infinite quantities in act and whose ideas are less well known. They are Paul Dubois-Reymond, Otto Stolz and Giuseppe Veronese. In this paper, I will present their conceptions, preceded, however, by some observations on the elements at infinity of projective geometry that had existed in mathematics since before the 19th century, but whose complete theory was offered in the 19th century.

Parole chiave
Poncelet; geometria proiettiva; Dubois-Reymond; Stolz; Veronese

Keywords
Poncelet; projective geometry; Dubois-Reymond; Stolz; Veronese

Corresponding author: paolo.bussotti@uniud.it

1. Introduzione

La teoria degli insiemi di Cantor (1845-1918) è una vera e propria sinfonia dell'infinito attuale. Tuttavia, nella matematica dell'Ottocento questo concetto gioca un ruolo importante anche in settori diversi dalla teoria cantoriana. Analizzerò quattro modi in cui l'infinito attuale venne concettualizzato e applicato nella matematica del XIX secolo: gli elementi all'infinito della geometria proiettiva; le concezioni di Paul Dubois-Reymond (1831-1889) e di Otto Stolz (1842-1905) e quelle di Giuseppe Veronese (1854-1917).

L'infinito in atto è connesso in maniere molto diverse all'ordine di idee summenzionato: gli elementi all'infinito della geometria proiettiva facevano parte dell'universo matematico prima del XIX secolo: Kepler (1571-1630) nei *Paralipomena ad Vitellionem* (1604) scrive che la parabola ha due fuochi, uno al finito e uno all'infinito. In Girard Desargues (1591-1661) il punto all'infinito è introdotto in modo sostanzialmente moderno. Tuttavia, solo nell'Ottocento gli elementi all'infinito divengono uno degli aspetti fondamentali della geometria proiettiva. Il testo che coagula le conoscenze precedenti e che pone l'insieme delle nuove prospettive teoriche su cui si baserà questa disciplina dagli anni '20 del secolo in poi è il *Traité des propriétés projectives des figures* (1822) di Jean-Victor Poncelet (1788-1867). Mi concentrerò, quindi, essenzialmente su questo lavoro. L'opera di Poncelet non è il frutto di una mente isolata, ma un elemento fondamentale di una disciplina, la geometria proiettiva, che nell'Ottocento ebbe molti adepti e che fu vista da alcuni matematici come il fondamento dell'intero edificio geometrico.

Con Stolz, Dubois-Reymond e Veronese, il quadro è molto diverso: siamo alla fine del secolo, la matematica ha avuto una grande evoluzione rispetto alla prima metà del secolo, l'analisi matematica e il concetto di numero reale sono stati fondati in modo rigoroso grazie a un ordine di idee che da Cauchy (1789-1857) e Dirichlet (1805-1859) arriva fino a Weierstrass (1815-1897), Dedekind (1831-1916) e Cantor. Stolz e Dubois-Reymond sviluppano le loro concezioni sull'infinito nell'ambito dell'analisi matematica, anche se Dubois Reymond nella *Die allgemeine Functionentheorie* (1882) introduce concetti vicini a quelli insiemistici.

Veronese, nella sua monumentale opera *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare* (1991) teorizza l'esistenza di segmenti infiniti e infinitesimi, a cui possono essere associati numeri, in aperta alternativa alla teoria degli insiemi di Cantor. Pone poi tali segmenti e numeri alla base della geometria non archimedea di cui fu l'inventore.

Con quanto esporrò non intendo dare un quadro esauriente dell'uso matematico dell'infinito attuale nel XIX secolo. Risulta, per esempio, escluso Bernard Bolzano (1781-1848), autore fondamentale per la speculazione sull'infinito attuale. Tuttavia, poiché le idee di Bolzano sono abbastanza conosciute, ho preferito soffermarmi su autori come Dubois-Reymond, Stolz e Veronese che sono meno noti.

2. Gli elementi all'infinito della geometria proiettiva

Nel *Traité des propriétés projectives des figures* Poncelet sviluppa una concezione grandiosa: la geometria analitica, sostiene il matematico francese, ha raggiunto una grande generalità grazie all'introduzione delle coordinate e all'uso dell'algebra e, in tempi successivi, del calcolo infinitesimale. Tuttavia, la natura profonda delle figure e delle relazioni geometriche viene oscurata nel trattamento algebrico-analitico. È possibile, si chiede Poncelet, che la geometria sintetica acquisti la stessa generalità della geometria analitica? La risposta è affermativa purché si focalizzi lo studio non più sulle proprietà metriche o, per usare un linguaggio introdotto poco dopo da Möbius, su quelle affini (1790-1868), ma solo sulle proprietà proiettive (grafiche).

Le proprietà metriche riguardano le misure di segmenti e angoli e sono quelle tipiche della geometria euclidea. Si può sviluppare una geometria in cui si prescinde da tali misure, ma si mantiene il concetto di parallelismo: la geometria affine. Esiste, però, una geometria ancor più generale in cui neppure il parallelismo si mantiene. Si tratta della geometria proiettiva (si veda Fig. 1).

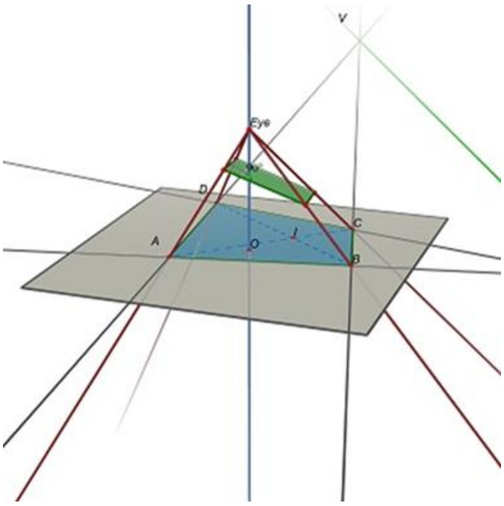

Fig. 1. Proiettando un rettangolo (in verde) che appartiene ad un piano α su un altro piano β da un punto dello spazio non giacente né in α né in β, si ottiene un quadrilatero che non è un rettangolo (in blu). Con una trasformazione un po’ più complessa è possibile proiettare ogni parallelogramma in un qualsiasi quadrilatero e viceversa anche rimanendo nello stesso piano.

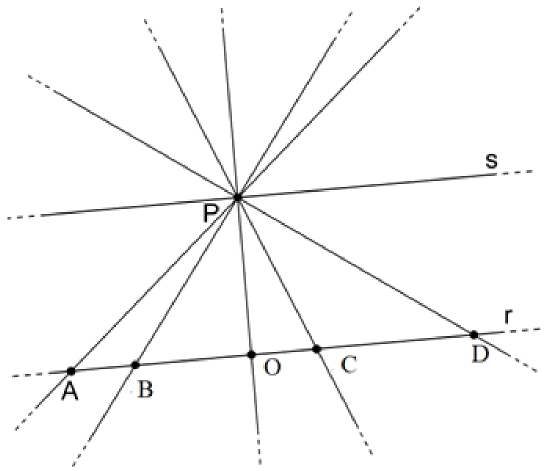

Fig. 2. Consideriamo una retta *r* e un punto *P* ad essa esterno. Sia *O* la proiezione ortogonale (il ragionamento può essere facilmente sviluppato senza far intervenire il concetto di ortogonalità. Lo introduco solo per una semplificazione espositiva) di *P* su *O*. La retta *PO* è secante a *r*. Man mano che la proiezione di *O* su *r* si sposta verso destra o verso sinistra si ottengono rette sempre più inclinate su *r*. Al limite, quando la proiezione tende all’infinito, la retta proiettante tende a diventare parallela a *r* (la retta *s*). Se consideriamo tale limite come attuale, il che non implica contraddizioni con il resto della geometria, otteniamo il punto all’infinito della retta *r*.

Poncelet riteneva che la geometria proiettiva fosse la nuova geometria pura in grado di rivaleggiare in generalità con la geometria analitica. Le trasformazioni affini e metriche potevano, poi, essere ottenute come trasformazioni proiettive, una volta stabilita la particolare natura di certi elementi. Nelle trasformazioni proiettive è conservata solo l’incidenza: un triangolo verrà trasformato in un triangolo, mai in un quadrilatero; una configurazione curva-tangente sarà trasformata in un’altra curva-tangente, cioè una tangente non sarà mai trasformata in una secante o una retta esterna. Si pone, allora, il seguente problema: esiste un modo di trattare le rette parallele come quelle incidenti, senza differenziare tra i due tipi di retta? La risposta è affermativa purché si introduca il punto all’infinito o punto improprio. Si dirà, allora, che due rette parallele sono secanti nel loro punto all’infinito. Sul piano euristico la situazione è visualizzabile come segue (si veda didascalia in Fig. 2).

Da quanto esposto nella didascalia della Fig. 2, risulta che: 1) due o più rette parallele si incontrano nel loro punto all’infinito; 2) una retta ha un solo punto all’infinito perché esiste una sola parallela alla retta data. Ne consegue che 3) in geometria proiettiva, la retta è una linea chiusa. Proseguiamo nel ragionamento: ogni fascio di rette parallele in un piano ha un proprio punto all’infinito che indica la direzione delle rette del fascio. La totalità dei punti all’infinito di un piano costituisce, pensò Poncelet, la retta all’infinito del piano. Quindi, ogni piano ha una retta all’infinito. Quando è che due piani si intersecano lungo le rispettive rette all’infinito? In analogia con quanto visto in Fig. 2, diremo che ciò accade quando i due piani sono paralleli. La retta all’infinito di un piano determina, quindi, la sua giacitura. Infine, la totalità delle rette all’infinito dello spazio determina il piano all’infinito, che è unico. Tutta l’euristica è indispensabile per comprendere l’origine dei concetti, ma sul piano matematico, può essere sostituita da un approccio puramente assiomatico.

Gli elementi all’infinito furono introdotti per specifiche necessità matematiche: infatti, le trasformazioni proiettive possono essere caratterizzate come quelle in cui è indifferente che un punto sia al finito e all’infinito. Quindi, volendo fondare in termini generali la geometria proiettiva non dovremo di-

stinguere tra elementi al finito o all'infinito. Questa è la grande generalità a cui si riferiva Poncelet, generalità che fu ulteriormente ampliata con l'introduzione degli elementi ideali, di cui qui, però, non possiamo parlare. Le trasformazioni affini e metriche sono ottenute specificando la natura di alcuni elementi. Per esempio, due punteggiate proiettive proprie sono simili se e solo se i loro punti all'infinito si corrispondono. Qui abbiamo specificato che le punteggiate sono proprie (abbiamo, cioè escluso la retta all'infinito) e che i punti all'infinito si corrispondono. Ecco allora giustificata l'idea che la geometria proiettiva possa essere a fondamento dell'intero edificio geometrico.
Gli elementi all'infinito costituiscono un'infinità potenziale o attuale? Non vi sono dubbi: attuale. Tali elementi sono trattati alla stregua di tutti gli altri, cioè come elementi attualmente esistenti, non come grandezze finite variabili che possono superare qualunque valore preassegnato.

3. Gli infiniti di Dubois-Reymond e Stolz

Il contesto è molto diverso dal precedente: siamo negli anni '70 dell'Ottocento: Paul Dubois-Reymond sta studiando problemi di analisi matematica legati alle serie di Bertrand e si trova ad analizzare l'ordine di infinito di certe funzioni quando x tende all'infinito. Il concetto di ordine di infinito era stato introdotto ben prima dell'opera di Dubois-Reymond. Tuttavia, il matematico tedesco si pone in una nuova prospettiva: è possibile, si chiede, considerare gli ordini di infinito come entità attuali e sviluppare un'aritmetica e un'algebra coerente di questi enti? Dubois-Reymond cominciò a riflettere su questi problemi in un suo articolo del 1871, *Sur la grandeur relative des infinis des fonctions*, in «Annali di matematica pura ed applicata», 4, IIa, pp. 338-353.
Per cominciare, stabilì una relazione d'ordine tra funzioni infinite quando x tende all'infinito. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due tali funzioni, allora $f(x)>g(x)$, $f(x)=g(x)$, $f(x)<g(x)$, a seconda che $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ o un numero diverso da 0 o 0. Dubois-Reymond parla di "disuguaglianze infinitarie".
Ciò premesso, è più semplice analizzare il ragionamento esposto in un lavoro successivo risalente al 1877 e intitolato significativamente *Ueber di Paradoxen der Infinitärcalcüls*, in «Mathematische Annalen», 11, pp. 149-157: si considerino logaritmi la cui base è sempre naturale. Il simbolo L_q, dove q è un naturale maggiore 1, indica l'operazione di estrarre il logaritmo composta q volte, cioè L=log, L_2 =log log, e così via. Il simbolo L_2 può essere sostituito da LL. Dubois-Reymond fa la seguente riflessione: è possibile approssimare un qualunque numero, per esempio 1/2 tramite una sequenza numerica $z_1, z_2, \dots$ in modo che ogni valore arbitrariamente vicino a 1/2 cada tra due valori della sequenza. Consideriamo adesso la sequenza di funzioni infinite per x tendente all'infinito

$$x^{1/2}, x^{2/3}, \dots, x^{p/(p+1)}, \dots$$

dove p è un intero positivo. Ad ogni funzione della successione si può attribuire un ordine di infinito uguale al suo esponente. Al tendere di p all'infinito, gli elementi della successione di funzioni tendono a x. Si può, però, dimostrare che, per quanto grande si prenda p varrà sempre

$$x^{p/(p+1)} < x^{LLx/(LLx+1)} < x$$

Posto, infatti, u=LLx, si ha $x = e^{e^u}$ e

$$\lim_{x\to\infty} x^{p/(p+1)} / x^{LLx/(LLx+1)}$$
$$= \lim_{u\to\infty} (e^{e^u})^{\frac{p}{p+1}-\frac{u}{(u+1)}}$$
$$\le \lim_{u\to\infty} (e^{e^u})^{-\frac{p}{(p-1)^2}}$$

poiché per $u \ge p^2+2p$, risulta $\frac{p}{p+1}-\frac{u}{u+1} \le -\frac{p}{(p+1)^2}$. Siccome $\lim_{u\to\infty}(e^{e^u})^{-\frac{p}{(p-1)^2}} = 0$, si ha anche $\lim_{x\to\infty} x^{p/(p+1)} / x^{LLx/(LLx+1)} = 0$. Dunque, l'ordine di infinito di $x^{p/(p+1)}$ è sempre minore di quello di $x^{LLx/(LLx+1)}$. Dubois-Reymond dimostra che questo fenomeno vale in generale, cioè che non esiste alcuna successione di funzioni che approssima con un errore arbitrariamente piccolo una data infinità. Questa caratteristica differenzia il calcolo infinitario da quello ordinario.
Un'altra osservazione interessante di Dubois-Reymond è la seguente: consideriamo l'integrale

$$J = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{a}\frac{t(\alpha)}{\alpha}d\alpha$$

È noto che se

$$t(\alpha)=\frac{1}{L\left(\frac{1}{\alpha}\right)L_2\left(\frac{1}{\alpha}\right)\dots L_r\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$$

l'integrale diverge, mentre se

$$t(\alpha)=\frac{1}{L\left(\frac{1}{\alpha}\right)L_2\left(\frac{1}{\alpha}\right)\dots L_{r-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)L_r\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1+\mu}}$$

l'integrale converge per ogni numero reale $\mu>0$.
Chiamiamo $\tau(\alpha)$ l'elemento divisorio tra i valori per cui $t(\alpha)$ converge e quelli per cui diverge. Si possono fare tre ipotesi riguardo a $\tau(\alpha)$:
1) Quando $t(\alpha)=\tau(\alpha)$, l'integrale né converge né diverge.
2) J è finito per $t(\alpha)\leq\tau(\alpha)$ e infinito per $t(\alpha)>\tau(\alpha)$.
3) J è infinito per $t(\alpha)\geq\tau(\alpha)$ e finito per $t(\alpha)<\tau(\alpha)$.
Du Bois-Reymond sostiene che la prima ipotesi va scartata perché i matematici non riconoscono quantità che non sono né finite né infinite. Egli dimostra, tuttavia, che non esiste alcuna funzione che soddisfi la 2) o la 3). Quindi, ne conclude che il limite tra un integrale convergente e uno divergente non è rappresentabile. Come uscire da questa situazione così fortemente controintuitiva e che lo stesso matematico tedesco giudica inaccettabile? Du Bois Reymond risponde che le funzioni che diventano infinite quali potenze, logaritmi ed esponenziali nonché loro combinazioni possono essere viste come numeri razionali. Esistono, però, altre funzioni che non possono essere ottenute in questo modo, così come √2 o π non possono essere espressi come combinazioni finite di numeri razionali. Il limite tra convergenza e divergenza è, allora, un'infinità irrazionale. In pratica Dubois-Reymond fa per gli infiniti delle funzioni un ragionamento simile a quello fatto da Dedekind per i numeri reali: postula che una funzione che separi le due classi per cui J converge o diverge esista anche se non appartiene a nessuna delle due classi. Ci sono, dunque, infiniti funzionali razionali e irrazionali.
Nel 1883 Stolz in *Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes*, in «Mathematische Annalen», 22, pp. 504-519, riassunse e chiarì alcuni elementi del calcolo degli infiniti di Dubois-Reymond. Sia $f(x), f_1(x), \dots$ un insieme di funzioni tendenti a $+\infty$ quando x tende a $+\infty$. Denotiamo con $U(f)$ l'ordine di infinito di una funzione, $U(f) \lesseqgtr U(f_1)$ a seconda che $\lim\left(\frac{f(x)}{f_{1(x)}}\right)$ sia 0, un numero diverso da 0 o $+\infty$. Ciò dato seguono in maniera abbastanza semplice le regole compositive-base del calcolo infinitario.

1) $U(ff_1)=U(f)+U(f_1)$.
2) $U\left(\frac{f}{f_1}\right)=U(f)-U(f_1)$, se $U(f)>U(f_1)$.
3) $U(f^n)=nU(f)$.
4) $U(\sqrt[n]{f})=\frac{1}{n}U(f)$.

Stolz stabilisce in maniera semplice e chiara che le grandezze infinite di Dubois-Reymond non sono archimedee. Consideriamo, infatti $f(x)=e^x$ e $f_1(x)=x$. Risulta che entrambe sono infinite positive per x tendente a $+\infty$ e che $\lim_{x\to\infty} f(x)/f_1(x)$ vale $+\infty$, cioè $U(f)>U(f_1)$. Se fosse valido l'assioma di Archimede dovrebbe esistere un numero naturale n tale che $nU(f_1)>U(f)$, ma questo non accade perché $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{nx}=\infty$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Quindi, l'insieme degli infiniti delle funzioni non è un dominio archimedeo.
Con questo abbiamo dato un'idea delle caratteristiche più importanti relative agli infiniti di Dubois-Reymond e Stolz. Molto ci sarebbe da aggiungere: dalle critiche di Cantor, alle idee di Carl Johannes Thomae (1840-1921), Alfred Pringsheim (1850-1941), Émile Borel (1871–1956), Arthur Schoenflies (1853-1928), Felix Hausdorff (1868-1942) cominciando dal *Die Allgemeine Functionentheorie* di Dubois-Reymond stesso e dalla teoria dei momenti di Stolz. Per questi sviluppi rimando all'ottimo articolo di Gordon Fisher, *The Infinite and Infinitesimal Quantities of Dubois-Reymond and their Reception*, in «Archive for History of Exact Sciences», 24, 2, 1981, pp. 101-163, da cui ho tratto molto di quanto qui presentato.

4. Gli infiniti e infinitesimi di Giuseppe Veronese

Nei *Fondamenti di geometria*, Veronese giunse a concepire un sistema di segmenti e numeri non archimedeo partendo da considerazioni puramente geometriche. Costruì, quindi, un continuo iperdenso in cui, oltre agli ordinari numeri reali, erano inserite infinite serie di numeri infinitesimi. Vediamo gli elementi essenziali della sua costruzione, basata su nove ipotesi.

Veronese definì omogeneo un sistema ad una dimensione se in un suo verso esistono due segmenti identici a un segmento dato aventi l'uno per primo l'altro per secondo estremo un elemento qualunque. Una retta e una circonferenza sono esempi tipici di sistemi omogenei. Se poi un sistema, partendo da un elemento A, è identico al sistema considerato nel senso opposto, viene chiamato identico nella posizione delle sue parti. Veronese chiarisce che, per esempio, un sistema costituito da archi identici di ellisse che cominciano in un punto A è omogeneo, ma non è identico nella posizione delle sue parti perché il sistema percorso in un verso partendo da A è diverso dal sistema percorso nel verso opposto (*Fondamenti*, p. 65).

A questo punto Veronese formula le prime due ipotesi sul continuo:

Ipotesi 1: vi è una forma che serve a determinare tutte le altre, la forma fondamentale (abbrevierò con f.f.).

Ipotesi 2: la f. f. è un sistema ad una dimensione identico della posizione delle sue parti.

Per determinare le proprietà della f.f. Veronese introduce un segmento (AB) considerato come unitario che determina una scala di grandezze.

Viene poi stabilita una condizione di non-archimedicità: nella f.f. è possibile determinare diverse unità di misura, per esempio (AB) e (A_1B_1) con (AB)>(A_1B_1). Può accadere che non esista alcun numero naturale n tale che $n(A_1B_1) > (AB)$. Si dice allora che il segmento (AB) è fuori dal campo della scala di (A_1B_1). La terza ipotesi è proprio la seguente:

Ipotesi 3: in un verso della f.f. esiste almeno un elemento fuori del campo della scala rispetto a ogni segmento limitato come unità.

In questo modo il continuo diventa iperdenso: nella sua struttura ci sono infinite scale, ciascuna con un proprio campo. Ogni campo è composto di segmenti non archimedei rispetto a quelli di altri campi.

Veronese indicò con A^∞ un elemento fuori dal campo della scala di un segmento AA_1 assunto come unità finita. È allora possibile formulare:

Ipotesi 4: nel campo all'infinito rispetto ad un'unità AA_1 qualunque, scelto un elemento arbitrio A^∞, nel segmento AA^∞: 1) esiste un elemento X tale che AX e XA^∞ sono infiniti rispetto a AA_1; 2) esiste un elemento A^∞ tale che qualunque sia X il segmento AX è finito rispetto a AA^∞.

La prima parte dell'ipotesi afferma che trai segmenti infiniti non ne esiste uno minimo, a differenza di quanto vale per i numeri ordinali di Cantor, per i quali ω è il minimo.

Al segmento infinito AA^∞ assunto come unitario, Veronese associò il numero ∞.

Le unità infinite sono ripartite in ordini. Sia ∞_1 l'unità infinita di ordine 1. Esistono i numeri

$\infty_1 + 1, \infty_1 + 2, \dots, \infty_1 + n, \dots,$ ma anche $\infty_1 - 1, \infty_1 - 2, \dots, \infty_1 - n, \dots,$

di nuovo, diversamente da quanto accade con l'ω di Cantor. È possibile sommare, moltiplicare e elevare a potenza i numeri infiniti tra loro, fino a giungere a forme quali ${\infty_1}^{\infty_1}$.

Veronese formula adesso la sua quinta ipotesi:

Ipotesi 5: dato un segmento infinito arbitrario AB e un segmento che appartiene a un campo la cui unità di scala AC è infinitesima rispetto ad AB, esiste un numero infinito a tale che $a{\cdot}AC{>}AB$. (Per comodità del lettore, ho leggermente modificato quanto scrive Veronese, senza cambiarne il concetto).

Questo vuol dire che, se noi consideriamo la totalità dei numeri infiniti e infinitesimi, la struttura che sta costruendo Veronese è archimedea.

L'ipotesi successiva è la seguente:

Ipotesi 6: ogni segmento con gli estremi variabili in versi opposti che diventa indefinitamente piccolo contiene un elemento fuori dal campo di variabilità degli estremi.

In altri termini: esistono segmenti infinitesimi attuali nella struttura del continuo che non possono essere raggiunti da alcun processo limite relativo ad un segmento finito decrescente.

Ipotesi 7: il segmento (AB), con cui abbiamo costruito la prima scala, contiene infinitesimi dello stesso ordine di quelli contenuti in ogni altro segmento limitato della f.f. e maggiore di (AB).

Così come esistono infinite classi di segmenti infiniti, ne esistono infinite di segmenti infinitesimi. Ognuna ha la sua propria unità con cui si può costruire una scala numerica.

Non riporto l'ottava ipotesi, che aggiunge poco rispetto alla sesta.

Veronese inserisce, invece, una interessante osservazione: è noto che due segmenti AB e CD sono commensurabili se esiste un numero naturale n tale che:

$$CD = (AB)\left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \cdots \frac{\alpha_n}{2^n}\right)$$

dove $\alpha_i = 0 \vee 1$. In caso contrario sono incommensurabili.
Veronese sottolinea che, rimanendo nel campo di una data scala, due segmenti possono essere incommensurabili e che, però, adottando tutti i numeri appartenenti ai diversi ordini di infinito e infinitesimo può esistere un numero infinito η tale che

$$CD = (AB)\left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \cdots \frac{\alpha_n}{2^n}\right)$$

In questo caso i segmenti sono commensurabili di seconda specie.
Introdotti i segmenti infiniti e infinitesimi di vario ordine e le scale numeriche ad essi associati, Veronese può concludere:
Ipotesi 9: la forma fondamentale è il sistema continuo identico nella posizione delle sue parti determinato dal minor numero di elementi.
Veronese offre anche una interessante visualizzazione di parte del continuo assoluto (Fig. 3).

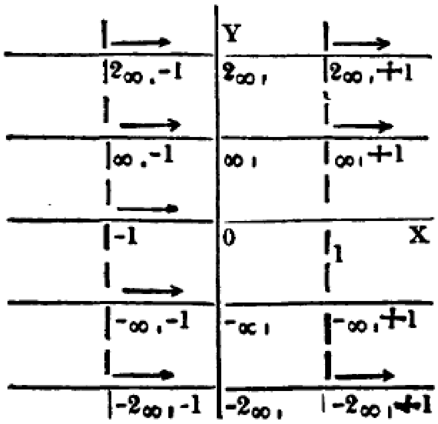

Fig 3. Rappresentazione di parte del continuo assoluto di Veronese. Le scale dei vari ordini di infinito sono rappresentate con rette parallele orizzontali. Oltre alle scale infinite, all'interno di ognuna di esse vi sono infinite scale infinitesime non rappresentate. Da Veronese, *Fondamenti*, p. 166.

Per le ulteriori caratteristiche del continuo di Veronese, dei suoi numeri infiniti e infinitesimi e le discussioni a cui dettero luogo rimando a Paolo Bussotti, *Giuseppe Veronese e i fondamenti della matematica*, ETS, Pisa 1997; Paolo Freguglia, *I fondamenti della geometria a più dimensioni secondo Giuseppe Veronese*, in S. Coen (a cura di), *Seminari di Geometria 1996-1997* (vol. 11), Tecnoprint, Bologna 1998, pp. 253-277; Paola Cantù, *Giuseppe Veronese e i fondamenti della geometria*, Unicopli, Milano 1999.
Con questo articolo abbiamo inteso fornire un quadro sintetico delle principali concezioni dell'infinito diverse da quella cantoriana sviluppatesi nel XIX secolo.

Paolo Bussotti
Università di Udine

n. 5
gennaio
2023

anno XL

La teoria degli insiemi. Dagli assiomi di base ai grandi cardinali

Set Theory. From the Basic Axioms to Large Cardinals

Claudio Ternullo

La teoria degli insiemi è considerata il fondamento della matematica. L'articolo offre una breve panoramica di alcuni risultati centrali della teoria degli insiemi primitiva (cantoriana), della teoria assiomatica (in particolare, della teoria ZFC), discute brevemente gli assiomi più recenti, per esempio quelli dei "grandi cardinali" e, infine, accenna alle varie strategie giustificative, a livello filosofico, dei vecchi e nuovi assiomi.

Set theory is taken to be the foundation of mathematics. The article provides a brief overview first of some central results of the Cantorian theory, then of axiomatic set theory (in particular, of the theory ZFC), briefly reviews new axioms such as "large cardinal" axioms, and, finally, hints at the various philosophical strategies behind the justification of both old and new axioms.

Parole chiave
Teoria degli insiemi; assiomi; ZFC; assioma di scelta; nuovi assiomi; grandi cardinali

Keywords
Set theory; axioms; ZFC; axiom of choice; new axioms; large cardinals

Corresponding author: claudio.ternullo@ub.edu

1. Preambolo: la teoria cantoriana

La teoria degli insiemi è il trionfo dell'*infinito attuale*, dell'infinito, cioè, esistente in senso *sostanziale*, non meramente *processuale*. Le origini della teoria vanno ricercate nell'opera di Georg Cantor, sebbene dei contributi fondamentali siano venuti anche dal lavoro di Bernard Bolzano e Richard Dedekind[1].

Usando il principio della *biiezione*, secondo cui due collezioni (finite o infinite) A e B hanno la stessa grandezza se esiste una funzione *biiettiva* (*iniettiva* e *surgettiva*) da A a B, Cantor fu in grado di stabilire che gli insiemi numerici $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ hanno la stessa grandezza (cardinalità) e che $\mathbb{R}$, invece, è *più grande di* $\mathbb{N}$. La dimostrazione di quest'ultimo risultato è particolarmente degna di nota. Cantor usò un procedimento "diagonale": per assurdo, supponiamo si dia un'enumerazione $R = \{r_0, r_1, \dots, r_n, r_{n+1}, \dots\}_{n \in \mathbb{N}}$ di *tutti* i numeri reali e si definisca un nuovo numero reale $\mathscr{r}$ *diverso* da r_0 per la prima cifra decimale, da r_1 per la seconda cifra decimale, e così via. $\mathscr{r}$ esiste (si può costruire *effettivamente*), ma non può, per definizione, essere in R.

La cardinalità di $\mathbb{R}$ (del *continuo*) si indica con $\mathfrak{c}$, mentre la cardinalità di $\mathbb{N}$ si indica con $\aleph_0$.

Dato un insieme A, si può definire l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi (ovverosia di tutti gli insiemi i cui elementi sono tutti in A). Questo insieme si chiama *insieme-potenza* e la sua cardinalità è $2^{|A|}$ ($|A|$ indica la cardinalità di A). I numeri reali si possono mettere in corrispondenza biunivoca con sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{N}$, quindi, $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. L'insieme potenza di $\mathfrak{c}$ ha cardinalità $2^{2^{\aleph_0}}$, l'insieme potenza di questo $2^{2^{2^{\aleph_0}}}$ e così via.

Si può procedere a definire altre cardinalità transfinite più grandi di $\aleph_0$ anche in un altro modo. Per spiegarlo bene, dobbiamo introdurre il concetto fondamentale di *ordinale transfinito*. Cantor introduce un nuovo numero ω *dopo* tutti i numeri naturali, e poi procede a definire $\omega + 1, \dots, \omega + n, \dots$, $\omega \cdot \omega, \dots, \omega^2, \dots, \omega^\omega$,... Dopodiché, definisce ω anche come il *tipo d'ordine* dell'insieme $\{0, 1, 2, \dots, n, n+1, \dots\}$, $\omega + 1$ come il *tipo d'ordine* dell'insieme $\{1, 2, \dots, n, n+1, \dots; 0\}$ e così via[2]. Ora, si dimostra che ciascuno di questi ordinali ha cardinalità $\aleph_0$, ma l'insieme di *tutti* questi ordinali è più grande di $\aleph_0$: ha la cardinalità immediatamente successiva, ovverosia $\aleph_1$. Il tipo d'ordine corrispondente, ω_1, si può combinare con gli altri ordinali e con sé stesso come sopra, così da avere altri ordinali che, presi insieme, hanno cardinalità $\aleph_2$ e, iterando il processo, otteniamo una nuova serie di cardinalità transfinite: $\aleph_0, \aleph_1, \dots \aleph_\omega, \dots$

Cantor congetturò che $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, ma non riuscì a dimostrarlo. L'Ipotesi del Continuo (come fu definita la congettura) fece da battistrada allo sviluppo della teoria degli insiemi. Più avanti, diremo qualcosa sul suo stato attuale.

Infine, si definisce *bene ordinato* un insieme: 1) che abbia un ordine *totale* (tale che ogni due suoi elementi siano confrontabili); 2) ogni cui sottoinsieme abbia un elemento minimo. Cantor riteneva che fosse una legge del pensiero che ogni insieme fosse *bene ordinabile*[3]. Non c'è nessun altro principio insiemistico che giustifichi questo assioma, per il quale Ernst Zermelo, più tardi, trovò una giustificazione più forte tramite il suo Assioma di Scelta.

2. Gli assiomi: giustificazione intuitiva e formale

Storicamente, alla fine dell'800 si avvia un processo di trasformazione della matematica in un corpo di teorie formali, formulate in un linguaggio logico rigoroso e trasparente. Questo riguarda l'aritmetica, l'analisi, la geometria, varie teorie algebriche, e, naturalmente, anche la teoria degli insiemi. Questo approccio culmina nell'idea hilbertiana (difesa, in tempi più recenti, per esempio anche da Bourbaki) secondo cui la matematica si occupa di specifiche strutture formalizzate (ovverosia, assiomatizzate) entro una cornice assiomatica più generale, che è quella degli insiemi.

La scoperta di *paradossi*, quale quello di Russell, suggeriva, inoltre, che il concetto ingenuo di insieme ("ogni proprietà definibile nel linguaggio definisce un insieme") fosse incoerente[4]. Formalizzan-

[1] Un quadro esauriente della storia primitiva della teoria si trova in J. Ferreirós, *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*, Birkäuser, Basel 2007. Si veda anche C. Ternullo, V. Fano, *L'infinito. Filosofia, matematica, fisica,* Carocci, Roma 2021, capitolo 2.

[2] Più tardi, von Neumann definisce gli ordinali come insiemi dei loro predecessori (0 è l'insieme vuoto, $\emptyset$): $1 = \{0\}$; $2 = \{0, 1\}$; ..., $\omega + 1 = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega\}$, ...

[3] Cf. G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, Springer, Berlino 1932, p. 169.

[4] Nel caso del paradosso di Russell, la proprietà in questione è: "x non è membro di sé stesso": se esistesse l'insieme X di tutti gli x che soddisfano questa proprietà, ne conseguirebbe che, se $X \in X$, allora $X \notin X$ e se $X \notin X$, allora $X \in X$.

do la teoria cantoriana, quindi, si sperava che se ne potesse garantire anche la *coerenza*.
Gli assiomi hanno altre giustificazioni, per così dire, filosofiche. Essi sembrano anche *intuitivamente* veri sulla base di un *concetto di insieme* che alcuni autori ritengono sia oggettivo. Questo non significa necessariamente che gli assiomi siano autoevidenti, ma che le proprietà che essi attribuiscono agli insiemi siano deducibili (attraverso un'analisi progressiva) dal concetto stesso di insieme.
Come si è già detto, gli assiomi hanno, poi, un valore *fondazionale* (servono a darci dei principi su cui edificare tutta quanta la matematica) e ci consentono anche di sviluppare "ulteriormente" la teoria degli insiemi nelle direzioni più varie. Queste ragioni si definiscono, qualche volta, *estrinseche*, ma secondo alcuni autori, non sono meno fondamentali[5].

3. La teoria assiomatica Zermelo-Fraenkel

La teoria degli insiemi Zermelo-Fraenkel (ZF) consta di 8 assiomi, 9 con l'Assioma di Scelta (ZFC). Essa fu formulata in momenti diversi da Ernst Zermelo e integrata da J. von Neumann e A. Fraenkel. Ulteriori contributi vennero da T. Skolem, K. Gödel, D. Mirimanoff e P. Bernays. Nel seguito introduciamo, con qualche parola di commento, gli assiomi, riservandoci di analizzare più precisamente quello della Scelta nel prossimo paragrafo.

Assioma di Estensionalità. *Insiemi che hanno gli stessi elementi sono uguali.*

Quest'assioma garantisce, da una parte, che insiemi con gli stessi elementi ma che soddisfano "proprietà" diverse siano uguali e, dall'altra, che oggetti diversi dagli insiemi non siano parte dell'"universo del discorso" della teoria.

Assioma della Coppia. *Dati due insiemi a e b, esiste l'insieme $\{a, b\}$.*

Assioma dell'Unione. *Dato un insieme A, esiste il suo insieme-unione: l'insieme di tutti gli elementi degli elementi di A.*

Assioma dell'Insieme Potenza. *Dato un insieme A, esiste l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi, $\mathcal{P}(A)$.*

[5] P. Maddy, *Set-Theoretic Naturalism*, «Journal of Symbolic Logic», 61, 2 (2006), pp. 490-514.

Questi tre assiomi ci consentono di effettuare varie operazioni insiemistiche. Per esempio, l'Assioma della Coppia ci consente di definire la nozione di *coppia ordinata* (a, b), l'Assioma dell'Insieme Potenza di definire concetti come quelli di *prodotto cartesiano*, *relazione* e *funzione*.
L'assioma successivo è centrale per gli scopi della teoria degli insiemi. Un insieme si definisce *infinito* se ha un *sottoinsieme proprio* (ovverosia, diverso dall'insieme stesso) infinito. Gli altri assiomi non ci consentono di dimostrare l'esistenza di un insieme con queste caratteristiche. Quindi abbiamo bisogno di un:

Assioma dell'Infinito. Esiste ω (ovverosia l'insieme che contiene $\emptyset$, il successore $s(\emptyset)$, il successore di questo, $s\big(s(\emptyset)\big)$, e così via).

Molti insiemi si definiscono a partire da proprietà (espresse nel *linguaggio* della teoria degli insiemi). Non tutte le proprietà, però, come sappiamo già dai paradossi, sono coerenti. Zermelo mise al riparo da contraddizioni quest'idea attraverso il suo:

Assioma di Separazione. Dato un insieme X e una proprietà ϕ, esiste l'insieme Y degli x in X che soddisfano ϕ.

Tramite l'Assioma di Separazione si dimostra che il paradosso di Russell è un teorema di ZFC: "non esiste un insieme universale" (se esistesse, allora conterrebbe insiemi che "non sono membri di sé stessi").
Sin qui, non abbiamo esaminato, però, insiemi che "sono elementi di sé stessi", o che appartengano a "insiemi che appartengono a insiemi che appartengono a insiemi... che appartengono a sé stessi" (cioè, insiemi che si definiscono tramite *cicli* che iniziano e terminano con lo stesso insieme). Nessuno degli assiomi precedenti consente o proibisce l'esistenza di questi insiemi, quindi si può esplicitamente bandirli tramite il seguente assioma:

Assioma di Fondazione (o Regolarità). *Dato un insieme A, esiste sempre un elemento di A tale che l'intersezione di questo elemento con A stesso è vuota.*

La ragione per cui questo assioma ha una certa naturalezza verrà brevemente tratteggiata alla fine della prossima sezione. Gli ultimi due assiomi di ZFC sono sia potenti che fondamentali. Il primo è:

Assioma di Rimpiazzamento. *Dato un insieme A, e una funzione f definita su di esso, l'immagine di f, $f(A)$, è pure un insieme.*

Questo assioma è molto forte, in quanto ci consente di generare ordinali quali $\omega + \omega$ e, assieme all'Assioma dell'Insieme Potenza, le cardinalità transfinite oltre il *numerabile* $(\aleph_1, \aleph_2, \dots, \aleph_\omega, \dots)$. Dell'ultimo assioma ci occupiamo nella prossima sezione.

4. L'assioma di scelta (AC)

Con l'Assioma della Scelta (che indichiamo con la sigla standard AC che sta per l'inglese "Axiom of Choice") si conclude la lista degli assiomi della teoria. Esso si può enunciare come segue:

Assioma di Scelta. *Data una famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi non vuoti e disgiunti, esiste sempre una funzione di scelta f su di essa, ovverosia una funzione che fa corrispondere a ogni elemento $A \in \mathcal{F}$ un elemento $f(A) \in A$.*

Cominciamo col notare che una *famiglia di insiemi* è una collezione di sottoinsiemi di un dato insieme (in questo caso, sottoinsiemi reciprocamente disgiunti). Ora, l'assioma assicura l'esistenza di una *funzione di selezione* di un "rappresentante" per ciascuno di essi. La ragione ovvia e immediata per l'introduzione dell'Assioma di Scelta è che esso è fondamentale per dimostrare che ogni insieme sia, come pensava Cantor, *bene ordinabile*. Si immagini, infatti, di voler bene ordinare $\mathbb{R}$: AC garantisce di poter "selezionare" sempre un *reale* alla volta un numero transfinito di volte dall'insieme (rimanente) dei reali. Grazie ad AC, si può dimostrare, inoltre, che ogni insieme ha una cardinalità che è un qualche $\aleph$.
La giustificabilità dell'assioma è controversa: non a caso, poc'anzi ci chiedevamo perché ogni insieme dovesse essere, intuitivamente, bene ordinabile. C'è chi ha sostenuto (come Cantor e Zermelo) che l'assioma abbia una sua autoevidenza, altri, invece, hanno sottolineato l'importanza di AC per la matematica, quindi il fatto che sia pienamente giustificato alla luce delle sue conseguenze.
Gli assiomi sono interpretabili come se si riferissero a una struttura, detta "gerarchia cumulativa", ovvero "gerarchia ben fondata" degli insiemi V (più semplicemente, "universo di tutti gli insiemi") i cui *livelli* contengono tutti gli insiemi definibili tramite gli assiomi. Il concetto di insieme, quindi, sembra implicare l'idea che gli insiemi siano gli elementi di V (il che rende abbastanza naturale l'Assioma di Fondazione). Studiare le proprietà di V è, quindi, lo scopo finale della teoria degli insiemi.

5. I nuovi assiomi

Ci sono proprietà degli insiemi che non sono dimostrabili in ZFC. Si dice che queste proprietà sono *indipendenti* dalla teoria. Per esempio, l'Ipotesi del Continuo è indipendente da ZFC. Questo risultato (dimostrato da K. Gödel e P. Cohen in due fasi diverse) ha generato un intenso dibattito filosofico sul significato dell'incompletezza insiemistica e sulla natura del concetto di insieme, di cui non possiamo rendere conto in questo articolo. Lo sviluppo di cui possiamo, brevemente, occuparci è quello della ricerca di nuovi assiomi, da aggiungere a ZFC per tentare di risolvere problemi come l'Ipotesi del Continuo e darci un quadro più esauriente, per così dire, della verità insiemistica. Si possono citare le seguenti classi di assiomi[6]:

1. *Assioma di Costruibilità*. L'Assioma di Costruibilità dice che V è uguale a una sua sottoclasse, che si indica con L che contiene solo gli insiemi che si possono definire con una formula del prim'ordine del linguaggio (costruibili). Ultimamente si sono prodotte estensioni di L compatibili con *grandi cardinali* (v. sez. 5). L'assioma implica l'Ipotesi del Continuo.

2. *Assiomi di Determinatezza*. L'Assioma di Determinatezza (AD) afferma che tutti i *giochi* a due definiti su sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono *determinati* (esiste una strategia vincente per uno dei due giocatori). Se i sottoinsiemi di reali sono di un certo tipo definibile, allora si ottengono assiomi di Determinatezza Definita. Si tratta di assiomi intensamente studiati in diverse aree della teoria degli insiemi e che hanno anche conseguenze robuste (AD contraddice AC). Non sembra, però, riflettano considerazioni di tipo intuitivo.

3. *Assiomi di Forcing*. Il *forcing* è un metodo per ottenere modelli di ZFC (P. Cohen lo inventò per trovare un modello che contraddicesse l'Ipotesi del Continuo). Questi assiomi, a loro volta, postulano

[6] Per una trattazione esauriente rinviamo a P. Maddy, *Believing the New Axioms*, I-II, «Bulletin of Symbolic Logic», 53, 2 (1988), pp. 481-511; 53, 3, pp. 736-64.

l'esistenza di nozioni di forcing corrispondenti all'esistenza di certi *ordini parziali*[7]. La cosa interessante è che questi assiomi, in generale, implicano che $\mathfrak{c} = \aleph_2$. Tuttavia, nessuno di essi sembra intuitivamente giustificato, anche se è stato argomentato che essi rispondano a principi di *massimalità* e *completezza*[8].

6. I grandi cardinali

Gli ultimi assiomi di cui ci occuperemo sono gli assiomi dei grandi cardinali. Quest'ultimi sono cardinali non generabili in ZFC. Essi generalizzano proprietà di cardinali più piccoli (di $\aleph_0$, per esempio), quali l'*inaccessibilità* e la *misurabilità*, ma si possono anche vedere come conseguenza di *principi di riflessione*: "una proprietà di V è soddisfatta già da qualche insieme più piccolo", o di *riflessione forte* (*rassomiglianza*): "V contiene una copia di sé stesso che ha le sue stesse proprietà"[9]. Ora, sia A un assioma che asserisce l'esistenza di un grande cardinale. ZFC+A dimostra la coerenza di ZFC. Inoltre, dati due assiomi A e B, può accadere che o ZFC+A dimostra la coerenza di ZFC+B, o viceversa, o entrambe le cose. Sia ϕ una proposizione indipendente da ZFC. Molto spesso si ha, inoltre, che ZFC+A dimostra la coerenza di ZFC+ϕ *e* viceversa: si dice, quindi, che la "forza di coerenza" di ϕ è uguale a quella di A.
Questi risultati ci danno una "misura" dell'indipendenza di ϕ. E questo è soltanto uno dei meriti della teoria dei grandi cardinali: essa ha ricadute ampie in settori della matematica anche non insiemistici. Infine, molti grandi cardinali hanno una base intuitiva in quanto sono giustificabili a partire da proprietà di V.

7. Conclusioni

L'esplorazione dell'infinito attuale, nella sua incarnazione insiemistica, ha dato risultati sorprendenti, che suggeriscono un'immagine di grande *unità* della matematica tutta. Questo dimostra, inoltre, che i fenomeni infinitari hanno un carattere fondativo e unificante: sebbene ovviamente la matematica non si riduca a una manciata di intuizioni concernenti gli insiemi infiniti, disporre di una teoria fondazionale unica ci consente di sviluppare ulteriormente le nostre intuizioni e di trovare nuove e più profonde connessioni fra tutti i fenomeni matematici. D'altro canto, se la matematica è la scienza di strutture astratte, senz'altro l'universo della teoria degli insiemi costituisce la *struttura fondamentale*, di cui gli assiomi delineano proprietà e potenziali estensioni.

Claudio Ternullo
Università di Barcellona

[7] Un ordine parziale è una relazione binaria riflessiva, anti-simmetrica e transitiva su un insieme dato; a differenza dell'ordine totale, un ordine parziale non implica la confrontabilità di due suoi elementi qualunque.
[8] J. Bagaria, *Natural Axioms of Set Theory and the Continuum Problem*, in P. Hájek, L. Valdés-Villanueva, D. Westertåhl (eds.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science: Proceedings of the Twelfth International Congress*, King's College Publications, London 2005, pp. 43-64.
[9] Tutte queste nozioni sono ben spiegate in A. Kanamori, *The Higher Infinite*, Springer, Berlino 2009.

I numeri infiniti ed infinitesimi nelle scuole superiori

n. 5
gennaio
2023

anno XL

Infinite and Infinitesimal Numbers in High Schools

Vieri Benci

In questo articolo si delinea un possibile percorso didattico che prevede l'insegnamento dei numeri infiniti ed infinitesimi fin dal primo anno della scuola superiore. I Metodi Non Standard, nel loro insieme, sono un argomento relativamente avanzato, ma i fondamenti della Matematica Non Archimedea (ovvero basata sui numeri infiniti ed infinitesimi) sono semplici ed intuitivi, e, a parer mio, possono essere utilizzati non solo per sviluppare in modo efficiente il calcolo differenziale, ma anche prima, per esempio, per introdurre i numeri reali.

The article outlines a teaching unit on infinite and infinitesimal numbers which could already be taught in the first year of high school. Overall, non-standard methods are (relatively) advanced, but the foundations of Non-Archimedean Mathematics (the one based on infinite and infinitesimal numbers) are simple and intuitive and, in my opinion, they can be used not only to develop efficiently the differential calculus, but even earlier, for example, to introduce real numbers.

Parole chiave
Infinito; infinitesimi; analisi non-standard; reali; matematica non-archimedea

Keywords
Infinite; infinitesimals; non-standard analysis; reals; non-archimedean mathematics

Corresponding author: vieri.benci@gmail.com

1. Introduzione

Negli ultimi anni ci sono stati alcuni tentativi di insegnamento dell'Analisi Non Standard nelle scuole superiori[1]. La maggiore rilevanza dell'uso dei numeri infinitesimi nasce dal calcolo infinitesimale. Dal punto di vista didattico questo significa che i numeri infiniti ed infinitesimi vengono introdotti durante l'ultimo(i) anno(i) delle scuole superiori. Forse però sarebbe auspicabile, introdurre i numeri infinitesimi prima, senza dover necessariamente seguire lo sviluppo culturale che abbiamo avuto noi docenti. Infatti, ci sono molti aspetti dei numeri infiniti ed infinitesimi estremamente interessanti che possono essere sviluppati anche prima del calcolo infinitesimale e addirittura prima dei numeri reali. Tra le motivazioni che suggeriscono l'introduzione dei numeri infiniti e infinitesimi nelle scuole superiori fino dai primi anni possiamo elencare le seguenti:

1 – L'argomento è affascinante e potrebbe stimolare l'interesse verso la matematica;

2 - Esistono alcune applicazioni della matematica non archimedea al di fuori del calcolo infinitesimale che possono essere fatte e capite con strumenti relativamente elementari nei primi anni delle superiori, per esempio nel calcolo delle probabilità[2];

3 - la capacità di manipolare gli infinitesimi renderà quasi banale la comprensione e le tecniche del calcolo differenziale;

4 - l'uso dei numeri infiniti e infinitesimi, facilita lo sviluppo delle capacità di astrazione dello studente.

2. Le numerosità ed il numero alfa

Possiamo definire il numero infinito α già al primo anno delle superiori:

Definizione 1. α è la numerosità dell'insieme dei numeri naturali

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\ldots..\}$$

Spiegazione. Ad ogni insieme finito si può associare un numero naturale: il numero dei suoi elementi ovvero la sua numerosità[3].

Dunque, possiamo generalizzare questa idea ed associare una **numerosità** anche agli insiemi infiniti. Per esempio, possiamo associare all'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali un numero che battezziamo α. Abbiamo bisogno di un nuovo nome e di un nuovo simbolo poiché nessun numero naturale è così grande da poter rappresentare la numerosità di $\mathbb{N}$.
Se esistono numeri infiniti, come possiamo rappresentare tutti questi numeri? Una importante classe di numeri può essere rappresentata da espressioni contenenti il simbolo α; ad esempio $\alpha+1$, α^2, $2\alpha-7$, sono tutti numeri infiniti che rappresentano la numerosità di insiemi opportuni. E come possiamo operare con questi numeri? Semplice: con questi numeri valgono le stesse regole algebriche che abbiamo imparato studiando il calcolo letterale. Ad esempio $(\alpha+1)-6=\alpha-5; (\alpha+1)^2=\alpha^2+2\alpha+1; \alpha-(\alpha+1)^2=-\alpha^2-\alpha-1$.

Osservazione 1. Una espressione del tipo $\alpha^2+\alpha$ non può essere "semplificata", proprio come non si può semplificare la scrittura del numero $\pi^2+\pi$.

Esempi:

$$\begin{aligned}3 &= \mathfrak{num}(\{1,2,3\}) = \mathfrak{num}(\{1,3,4\}) \\ &= \mathfrak{num}(\{6,33,47\})\end{aligned}$$
$$\alpha+1=\mathfrak{num}(\mathbb{N}_0)=\mathfrak{num}(\mathbb{N}\cup\{0\})$$
$$\alpha^2=\mathfrak{num}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$$
$$2\alpha=\mathfrak{num}\{1,-1,2,-2,3,-3,\ldots\}$$
$$2\alpha+1=\mathfrak{num}(\mathbb{Z})=\mathfrak{num}\{-2,-1,0,1,2,\ldots\}$$
$$\alpha-3=\mathfrak{num}\{4,5,6,\ldots\}$$

3. La retta euclidea

L'idea di continuo è descritta o modellizzata dalla retta euclidea che denoteremo con $\mathbb{E}$. Il continuo non è importante solo per la geometria, ma per tutte le scienze "quantitative". Infatti, le grandezze possono essere "rappresentate" da punti sulla retta euclidea (una volta scelta l'origine O ed un punto U che rappresenta l'unità). Pertanto, possiamo enunciare il seguente enunciato "metamatematico":

[1] P. Bontivoglia, *Il calcolo infinitesimale. Analisi per i licei alla maniera non-standard*, Universal Book, 2011; D. Zambelli et al., *Matematica C3, Matematica dolce 1,..,5*, Matematicamente.it., 2019.
[2] V. Benci, *Un possibile percorso didattico: dalle numerosità ai numeri euclidei*, in P. Bonavoglia (ed.), *Atti del convegno: VIII giomata nazionale di Analisi Nonstandard*, 2019, pp. 21-33.

[3] Una presentazione divertente della teoria delle numerosità si trova in S. Wenmackers, *1,2,3...Infinity!* (URL: https://www.youtube.com/watch?v=QJuuKQBhenY&t=144s), 2016; chi volesse approfondire l'argomento può vedere V. Benci, P. Freguglia, *La matematica e l'infinito*, Carocci, Roma 2019.

alla misura di ogni grandezza possibile possiamo far corrispondere un punto della retta Euclidea.

Chiamiamo *numeri euclidei* i numeri che corrispondono ai punti della retta euclidea e cerchiamo di capire come sono fatti sia per soddisfare la nostra intuizione sia per risolvere i problemi che la natura pone all'indagine matematica.

4. La retta empirica

La misura di ogni grandezza fisica dà sempre un numero decimale finito. D'altra parte, dato un righello, ad ogni decimale finito, possiamo far corrispondere un punto della retta euclidea. Pertanto, se denotiamo con $\mathbb{D}$ l'insieme dei decimali finiti possiamo chiederci se possiamo identificare la retta euclidea con la **retta empirica** $\mathbb{D}$. È legittimo supporre *retta euclidea* = *retta empirica*? Ovviamente no! Basta dividere un segmento unitario in tre parti uguali ed abbiamo che $\frac{1}{3} = 0,3333333333\ldots$. Ma un segmento di lunghezza $\frac{1}{3}$ che (teoricamente) può essere costruito con riga e compasso, determina un punto sulla retta euclidea, ma non sulla retta empirica.

5. La retta razionale

La retta razionale può essere identificata con l'insieme dei numeri che possono essere espressi come frazioni di numeri interi. Possiamo chiederci se la retta razionale $\mathbb{Q}$ è adeguata a rappresentare il continuo euclideo. Tra l'altro la retta razionale ha una bellissima proprietà:

con i numeri razionali risulta possibile eseguire le quattro operazioni sia mediante algorimi finiti, sia usando riga e compasso

È legittimo supporre *retta euclidea = retta razionale*?

Ovviamente no! Ed i motivi sono (almeno) due:

1 - La retta razionale non permette di descrivere le grandezze che sono incommensurabili rispetto all'unita di misura: per esempio $\sqrt{2}$.

2 - La retta razionale non permette di descrivere le grandezze non archimedee come, per esempio, la numerosità di $\mathbb{N}$.

Per sottolineare l'ineguatezza dei numeri razionali nel descrivere tutte le grandezze è utile ricordare che $\sqrt{2}$, essendo la diagonale di un quadrato di lato unitario, può essere costruita con riga e compasso. Un infinitesimo non si può "costruire direttamente" con riga e compasso, ma si possono costruire grandezze non archimedee, per esempio gli angoli di contingenza.
A questo punto è arrivato il momento di introdurre i **numeri reali** (che permettono di trattare grandezze fra loro incommensurabili) ed i **numeri iperreali** (che permettono di trattare grandezze infinite ed infinitesime). L'approccio classico è il seguente:

I - si costruiscono i reali mediante le sezioni di Dedekind;

II - si costruiscono i numeri iperreali mediante un ultrafiltro.

Adesso, esporrò un approccio diverso più vicino allo sviluppo storico. Ricordiamo che gli infinitesimi sono stati usati sistematicamente fin dal XVII secolo (Leibniz) mentre i numeri reali hanno fatto la loro comparsa verso la fine del XIX secolo (Cantor e Dedekind)[4]. Da qui si può dedurre che il concetto di numero reale è più sofisticato e sottile di quello di numero infinitesimo. Pertanto, mi sembra che, anche didatticamente, sia più naturale introdurre prima i numeri infinitesimi ed utilizzare questi ultimi per introdurre i numeri reali.

6. La retta iperrazionale

A partire da α e dai numeri razionali, usando le operazioni di campo, si possono definire nuovi numeri come ad esempio $\alpha + 1$; -7α; $\frac{\alpha}{\alpha^2-2}$, etc. Più precisamente, un numero iperrazionale può essere definito come il rapporto di due numerosità aggiungendovi un segno. Adesso risulta utile la seguente classificazione dei numeri euclidei.

[4] Una breve presentazione storica di questi aspetti si trova in V. Benci, P. Freguglia, *Alcune osservazioni sulla matematica non archimedea*, «Matem. Cultura e Soc., RUMI», 1 (2016), pp. 105-122; per un'analisi più dettagliata, si veda V. Benci, P. Freguglia, *La matematica e l'infinito*, cit.

Definizione 2. Un numero euclideo $x \in \mathbb{E}$ si dice *infinito* (o *illimitato*) se comunque si scelga un numero naturale k

$$|x| > k$$

Un numero euclideo $x \in \mathbb{E}$ si dice *limitato* se non è infinito, ovvero se esiste un numero naturale k tale che

$$|x| < k$$

Un numero euclideo $x \in \mathbb{E}$ si dice *infinitesimo* se per ogni numero naturale k

$$|x| < \frac{1}{k}$$

Per esempio, è facile verificare che i numeri $\alpha + 1, 7\alpha, \frac{\alpha^3}{2}, \frac{\alpha+2}{5}$ sono infiniti. Similmente possiamo verificare che i numeri $\frac{7}{\alpha-8}, \frac{2}{\alpha^3}, \frac{5\alpha}{\alpha^3+1}$ etc. sono infinitesimi. Si osservi che l'unico infinitesimo razionale è 0. Due numeri, x ed y si dicono infinitamente vicini se la loro differenza è un infinitesimo; in tal caso scriveremo $x \sim y$. I numeri iperrazionali però non sono sufficienti a coprire tutta la retta euclidea in quanto $\sqrt{2}$ non è iperrazionale ovvero l'equazione $x^2 = 2$ non ha alcuna soluzione nel mondo degli iperrazionali. Però non è difficile dimostrare che esistono infiniti numeri iperrazionali q tali che $q^2 \sim 2$.

7. Il principio della parte standard

Per continuare il nostro discorso, dobbiamo pensare ad i numeri euclidei come misure di grandezze. Una misura empirica darà sempre un decimale finito, ma aumentando la precisione della misura, possiamo aumentare il numero di cifre decimali, comunque non potremo mai raggiungere una misura perfetta. Se una grandezza è infinitesima, allora ogni sua misura darà sempre 0; anche se utilzziamo infinite cifre decimali, il risultato non cambia. Il discorso però è diverso se abbiamo una grandezza commensurabile con l'unità, per esempio $\frac{1}{3} = 0{,}3333333\ldots$ Queste considerazioni ci portano al Principio della Parte Standard che può essere considerato un assioma che caratterizza il continuo euclideo:

Principio della parte standard. *Ad ogni numero euclideo limitato x possiamo far corrispondere un numero $st(x)$, chiamato parte standard di x, in modo che le seguenti condizioni siano soddisfatte:*

1 – se x è infinitesimo, allora $st(x) = 0$
2 – se x è un numero razionale, allora $st(x) = x$
3 – l'operazione $st(x)$ è coerente con le operazioni di somma e prodotto, ovvero

$$st(x + y) = st(x) + st(y);$$
$$st(xy) = st(x) \cdot st(y)$$

L'assioma della parte standard ci permette di introdurre la nozione di numero reale in un modo che si discosta dalla tradizione in un un modo molto significativo:

Definizione 3. Un numero euclideo x si dice reale se e solo se è finito e $x = st(x)$.

Per uno studente, probabilmente, questa definizione di numero reale è più semplice di quella fornita dalle sezioni di Dedekind e credo che sia anche molto più intuitiva. Mediante questa definizione, ogni numero euclideo finito ξ può essere scritto nel seguente modo $\xi = r + \varepsilon$, ove r è un numero reale ed ε è un infinitesimo. Utilizzando i numeri euclidei le principali nozioni del calcolo infinitesimale risultano semplificate e soprattutto molto più vicine all'intuizione come, per esempio, la nozione di derivata:

Definizione 4. La derivata in un punto x della funzione f è data da:

$$Df(x) = st\left(\frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}\right)$$

qualora questo valore non dipenda da ε.

Per chiunque voglia approfondire questa impostazione didattica dell'Analisi Non Standard rimandiamo a Benci (2019).

Vieri Benci
Università di Pisa

n. 5
gennaio
2023

anno XL

L’Infinito Fisico

Physical Infinity

Enrico Cinti, Marco Sanchioni

La natura dell'infinito è una questione che ha da sempre affascinato scienziati, filosofi e persone comuni. Una forma particolarmente interessante di questa discussione è la questione dell'infinita divisibilità dello spazio. In questo contributo analizzeremo l'impatto della fisica moderna su questa domanda.

The nature of infinity is a question that has always fascinated scientists, philosophers, and ordinary people. This discussion takes a particularly interesting form through the question of the infinite divisibility of space. In this paper, we analyze the impact of modern physics on this question.

Parole chiave
Infinito; divisibilità; teoria di campi quantistici; gravità quantistica

Keywords
Infinity; divisibility; quantum field theory; quantum gravity

Corresponding author: cinti.enrico@gmail.com; marco.sanchioni2@gmail.com

1. Introduzione

La natura dell'infinito in fisica è una questione che ha da sempre affascinato scienziati, filosofi e persone comuni. Una forma particolarmente interessante di questa discussione è la questione dell'infinita divisibilità dello spazio. Per infinita divisibilità intendiamo **(ID)** la possibilità, data una certa regione di spazio, di dividerla ulteriormente in regioni più piccole e di poter iterare questo processo infinite volte. L'obiettivo di questo nostro contributo è quello di discutere lo *status* di questo problema nel contesto della fisica contemporanea. In particolare, ci concentreremo sull'opposizione tra gli atomisti, ovvero coloro che rifiutano **(ID)**, le cui origini si possono far risalire a Democrito, e i continuisti, ovvero coloro che accettano **(ID)**, le cui origini si possono far risalire a Aristotele.

2. Divisibilità delle Particelle Elementari

In questo paragrafo ci occuperemo di **(ID)** nel contesto delle *teorie quantistiche dei campi*, di cui l'esempio più celebre è il *modello standard delle particelle elementari*,[1] ovvero quella teoria che descrive le interazioni tra i costituenti più fondamentali della materia finora sperimentalmente identificati, tra cui possiamo annoverare ad esempio i quark, gli elettroni e il bosone di Higgs. È importante ricordare che il modello standard non tratta fenomeni gravitazionali, la cui descrizione classica è affidata alla Relatività Generale e la cui descrizione quantistica è al momento attivo oggetto di ricerca. Ci occuperemo della gravità quantistica nella prossima sezione.

2.1 Risoluzione e Teorie Effettive

Per affrontare la questione della validità di **(ID)** nel contesto del modello standard delle particelle sarà utile un'analogia. L'analogia in questione è tra la nozione di teoria effettiva e quella di risoluzione.
Con teoria effettiva intendiamo una certa teoria fisica valida solo a una certa scala di energia e non per scale di energie più basse o, soprattutto, più alte. Questo è vero per quasi tutte le teorie quantistiche di campo e, in particolare, per il modello standard delle particelle elementari. Questa teoria, infatti, non è valida a qualunque scala di energia. A energie molto alte si incontrano delle cosiddette *divergenze ultraviolette.* Per divergenza intendiamo che alcune quantità fisiche calcolate in questa teoria assumono valore infinito, che le rendono fisicamente inaccettabili in quanto in natura non possono esistere quantità fisiche infinite. Si pensi, per esempio, all'energia: una quantità infinita di energia non avrebbe senso fisicamente. Per ultravioletto intendiamo invece il regime energetico in cui queste divergenze emergono. In particolare, ultravioletto si riferisce al regime di energie molto alte. Se invece queste divergenze si fossero verificate a energie molto basse, avremmo parlato di *infrarosso*.
Questo significa quindi che il modello standard delle particelle elementari è una descrizione adeguata della fisica soltanto per una determinata fascia di energie. Possiamo intuitivamente capire questa affermazione pensando al fatto che, a energie molto alte, sarà necessario includere nella descrizione fenomeni gravitazionali che il modello standard non descrive. Diverrà quindi una descrizione inadeguata che andrà sostituita con una descrizione più completa. La presenza di divergenze ultraviolette è un segnale che questa sostituzione è necessaria e non può essere evitata.
Un'utile analogia, che ci servirà anche in seguito, per comprendere cosa sia una teoria effettiva è il concetto di risoluzione. Quando parliamo di risoluzione intendiamo la distanza minima che un certo apparato è in grado di risolvere. Si pensi ad esempio alla macchina fotografica: il numero di pixel della macchina fotografica ci dice quanto è alta la sua risoluzione perché indica, concretamente, in quanti quadratini può essere scomposta la nostra immagine. Più sarà alto il numero di quadratini in cui può essere scomposta la nostra immagine, più dettagli saremo in grado di cogliere dell'immagine stessa.
L'uso di una teoria effettiva in fisica è analogo all'uso della risoluzione nel caso della fotografia. Infatti, nella fisica delle particelle, si dà il caso che ci sia una corrispondenza tra lunghezze ed energie. In particolare, a energie sempre maggiori corrisponderanno lunghezze sempre più piccole. Di conseguenza, una teoria effettiva è come una fotografia con un certo numero di pixel: è in grado di risolvere la nostra immagine della fisica solo fino a una certa scala. Se vogliamo avere accesso a descrizioni più dettagliate ci servirà una nuova teoria effettiva che abbia una risoluzione più alta. L'immagine che emerge da questa riflessione è quella di una torre, potenzialmente infinita, di teorie effettive di risoluzione sempre maggiore.

[1] S. Braibant, G. Giacomelli, M. Spurio, *Particelle e interazioni fondamentali: Il mondo delle particelle,* Springer Science & Business Media, 2012.

2.2 Risoluzione e Teorie Effettive

Iniziamo, prima di tutto, dal riformulare **(ID)** in una maniera che sia più consona al contesto delle teorie effettive. **(ID)** corrisponde all'affermazione che esista una teoria che abbia infinita risoluzione. Questo perché una teoria con infinita risoluzione è una teoria in grado di esplorare porzioni infinitamente piccole di spazio e, di conseguenza, di dividere una qualunque regione di spazio in regioni più piccole. La domanda è quindi se possano esistere teorie di campo con risoluzione infinita. Ricordando la connessione tra lunghezza ed energia valida per le teorie quantistiche di campo questo corrisponde a teoria valide per scale di energia arbitrariamente alte e quindi prive di divergenze ultraviolette. Chiameremo una teoria di questo tipo una teoria *U(ltra)V(ioletto) completa*. L'esistenza o meno di un completamento ultravioletto per il modello standard delle particelle elementari, ovvero di una teoria UV completa di cui il modello standard è una teoria effettiva, è una questione aperta. Quello che è più interessante per lo *status* di **(ID)** è, da un lato, che in questo contesto **(ID)** diventa una vera e propria domanda empirica da studiarsi con gli strumenti della fisica delle particelle. Non si tratta più quindi di una semplice speculazione ma di un vero e proprio programma di ricerca scientifico. Atomisti e continuisti sono quindi, in questa prospettiva, impegnati nello sviluppo di due diverse teorie scientifiche, tra le quali sarà l'evidenza empirica a decidere. Dall'altro lato, il modello standard delle particelle elementari, pur essendo ad oggi la teoria fisica più fondamentale (ovvero con la più alta risoluzione) per la quale abbiamo significative prove sperimentali, non è in grado di determinare la verità o falsità di **(ID)**. Il modello standard, infatti, come abbiamo ricordato prima, è una teoria effettiva. In particolare, quindi, il modello standard non ha sufficiente risoluzione per verificare l'infinita divisibilità dello spazio ed è, in ultima istanza, insensibile all'esistenza di un suo UV-completamento (continuisti) o, in alternativa, di una torre infinita di teorie effettive di risoluzione sempre più alta ma mai UV-complete (atomisti). Si noti che quest'ultimo è un atomismo debole, nel senso che si può sempre aumentare risoluzione, ma non si raggiunge mai il limite del continuo. Non garantisce però l'esistenza di una risoluzione minima (atomismo forte).

3. Divisibilità e Gravità Quantistica

Per rispondere alla domanda sullo *status* di **(ID)** nella fisica moderna ci serve quindi guardare a teorie più fondamentali del modello standard delle particelle elementari. In particolare, come abbiamo menzionato prima, ci serve guardare alle teorie più fondamentali di tutte: le teorie di gravità quantistica. Con gravità quantistica intendiamo una teoria che sia in grado di descrivere la forza gravitazionale, che da Einstein in poi è associata alla dinamica dello spazio-tempo e, in particolare, alla sua curvatura, in quel regime di energie molto alte dove bisogna considerare anche effetti dovuti alla meccanica quantistica. Si tratta quindi di formulare una teoria quantistica dello spaziotempo.

3.1 (ID) e lo Spaziotempo Dinamico

Nella discussione dei paragrafi precedenti, centrata sulle teorie quantistiche di campo, abbiamo fatto ampio uso del concetto di risoluzione per spiegare lo status di **(ID)** in queste teorie. Questa possibilità si reggeva sul fatto che, in una teoria quantistica di campo, lo spazio-tempo è uno sfondo non dinamico sul quale la fisica si svolge. Possiamo usarlo per definire nozioni come *scala di lunghezza* in maniera univoca e quindi, per la corrispondenza discussa prima, nozioni come *scala di energia* in maniera analoga. Questo non è però più possibile una volta che abbiamo una teoria di gravità dove, seguendo Einstein, lo spazio-tempo non è più uno sfondo ma un attore protagonista nell'evoluzione dinamica di queste teorie. In particolare, in una teoria di gravità lo spazio-tempo è un campo come tutti gli altri, quindi non può essere usato come background per definire nozioni come scala di lunghezza o scala di energia. Infatti, queste nozioni, nel paradigma delle teorie effettive, servono a definire diversi regimi in cui diverse teorie effettive si applicano. Ma, se la nozione stessa di lunghezza, e quindi di energia, è parte della dinamica della teoria, non può essere più usata per definire diversi regimi della teoria stessa. Fare ciò richiederebbe che la lunghezza abbia una sorta di doppia natura, ai limiti della schizofrenia: da un lato, dovrebbe essere un parametro esterno non dinamico che ci dice a quale risoluzione ci troviamo e quindi quale teoria effettiva, con una certa dinamica, utilizzare; dall'altro lato, la lunghezza stessa è una quantità dinamica che è determinata dall'evoluzione dello spazio-tempo. La lunghezza dovrebbe quindi essere, allo stesso tempo, un parametro non dinamico che parametrizza un insieme di teorie e una quantità dinamica de-

scritta da una specifica teoria. Questa duplice natura è chiaramente impossibile.
La conseguenza di questa osservazione, è quindi che l'uso della nozione di scala di energia in gravità quantistica non è più sufficiente a verificare la validità o meno di **(ID)**. Ci serve, semmai, verificare direttamente se gli oggetti fondamentali di queste teorie siano o meno infinitamente piccoli. Se sono infinitamente piccoli, allora avranno risoluzione infinita, verificando quindi **(ID)** (continuisti). Se invece avranno una lunghezza finita, allora avranno risoluzione finita, falsificando **(ID)** (atomisti).

3.2 Stringhe e Loop

In questo paragrafo, andremo a discutere brevemente i due principali candidati per una teoria di gravità quantistica, la teoria delle stringhe e la gravità quantistica a loop, e a ragionare dello *status* di **(ID)** in queste teorie.

Teoria delle stringhe[2]: la teoria delle stringhe è uno dei principali candidati per una teoria di gravità quantistica e postula che a energie molto elevate le particelle del modello standard si rivelino in realtà essere vibrazione di una stringa. Una stringa è un oggetto esteso in una dimensione spaziale e in una temporale, a differenza di una particella che è estesa solo nella direzione temporale mentre in quella spaziale è puntiforme. Un fatto importante riguardo la teoria delle stringhe è che le stringhe, essendo oggetti estesi, hanno una certa lunghezza caratteristica. Questa lunghezza ci dice essenzialmente qual è la lunghezza minima che la stringa è in grado di esplorare. Lunghezze inferiori a α sono inaccessibili alla stringa. Di conseguenza, sembra che, nel contesto della teoria delle stringhe, **(ID)** sia violata dato che esiste una risoluzione minima data da α.

Gravità quantistica a Loop[3]: la gravità quantistica a loop è il principale concorrente della teoria delle stringhe per una teoria di gravità quantistica. Pittorescamente, questa teoria postula che lo spaziotempo sia formato da una grana di atomi spaziotemporali. Questi atomi spaziotemporali, come gli atomi di Democrito, hanno un'estensione e quindi una lunghezza minima β che sono in grado di risolvere.

Di conseguenza, come nel caso delle stringhe, β pone un limite minimo alla capacità di risoluzione della teoria. Anche in questo caso, quindi, sembra che **(ID)** sia falsificato e che una teoria atomista si apreferita dalla gravità quantistica a loop.

4. Conclusioni

In questo breve contributo abbiamo analizzato la questione dell'infinita divisibilità nel contesto della fisica moderna. Abbiamo prima di tutto visto che il modello standard delle particelle elementari, ovvero lo stato dell'arte delle teorie sperimentalmente verificate a nostra disposizione, rimane silente su questa questione essendo una teoria effettiva. Questo ci ha spinti a guardare alle teorie di gravità quantistica per trovare una risposta allo status di **(ID)**. Sebbene sia la teoria delle stringhe sia la gravità quantistica a loop sembrino preferire una prospettiva atomista, va comunque osservato che queste teorie sono entrambe delle ipotesi non confermate sulla natura della gravità a livello quantistico. Di conseguenza, lo *status* di **(ID)** rimane comunque una domanda aperta.

Enrico Cinti
Università di Ginevra / Università di Urbino

Marco Sanchioni
Università di Urbino

[2] B. Greene, C. Bartocci, L. Civalleri, *L'universo elegante: superstringhe, dimensioni nascoste e la ricerca della teoria ultima*, Einaudi, Torino 2000.

[3] C. Rovelli, *L'ordine del tempo*, Adelphi Edizioni, Milano 2017.